Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Principais Axiomas da Matemática †

por

Magnun César Nascimento dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

S237p Santos, Magnun César Nascimento dos.
Principais axiomas da matemática / Magnun César Nascimento dos Santos.-- João Pessoa, 2014.
43f.
Orientador: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Axiomas. 3. Lema de Zorn. 4. Axioma da escolha.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Principais Axiomas da Matemática

por

Magnun César Nascimento dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros - UFPB

Prof. Dr. Maurício Cardoso Santos - UFPE

Agosto/2014

Agradecimentos

A Deus pelo dom que me foi dado.

A UFPB, pela excelência de ensino.

Ao Professor Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, pela orientação e pela confiança em mim depositada para a elaboração deste trabalho tão desafiador.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, obrigado pelos ensinamentos e exemplo ao longo desta jornada.

A minha mãe, Miriam Maria, que sempre acreditou, me incentivou bastante e que não mediu esforço para que eu pudesse chegar até aqui.

Aos meus irmãos, Mitchel e Moema, meus eternos amigos.

Aos grandes amigos conquistados durante o curso, com o qual fizemos um grupo de estudo (Os Congruentes) que virou uma família, muito obrigado Alessandro Mignac, André Rodrigues, Washington Gonçalves e Cybele Verde, durante essa jornada eu aprendi muito com vocês.

A Adriana Nascimento, que muito me incentivou nesta jornada, muito obrigado pelos puxões de orelha, eles tiveram êxito e me ajudaram a chegar até aqui.

Aos meus alunos, que por muitas vezes mesmo sem saber o significado deste curso, mas eles sempre estavam ali me apoiando e me incentivando, para que este objetivo fosse alcançado. Saibam que vocês são minhas inspirações.

Ao amigo e Mestre Laércio Francisco Feitosa, pela inestimável ajuda na formatação deste trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A Deus e minha querida mãe por toda a sua dedicação e empenho para que eu pudesse chegar onde cheguei.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo fazer uma abordagem sobre a importância de sistemas axiomáticos na Matemática. Estudaremos alguns axiomas clássicos, suas equivalências e veremos algumas aplicações dos mesmos.

Palavras-chave: Axiomas, Lema de Zorn, Axioma da Escolha.

Abstract

The main objective of this work is showing the importance of systems axiomatic in mathematics. We will study some classic axioms, their equivalence and we will see some applications of them.

Keywords: Axioms, Zorn's Lemma, Axiom of Choice

Sumário

Introdução

Este trabalho aborda a Teoria dos Conjuntos numa visão axiomática. O objetivo do mesmo é apresentar os axiomas e suas necessidades de existência para a Matemática, e os sistemas axiomáticos, uma vez que desde de criança trabalhamos com os axiomas de uma forma bem intuitiva, como por exemplo, na definição união de conjuntos. Portanto, neste trabalho apresentaremos alguns axiomas e sistemas axiomáticos e as equivalências que existem entre os principais axiomas da Teoria dos Conjuntos, a saber, Axioma da Escolha, Lema de Zorn e Teorema de Zermelo.

Muito se discutiu sobre o Axioma da Escolha nos últimos 100 anos, pois até os fins do século XIX, aceitava-se a noção de conjuntos como sendo uma coleção de qualquer objetos, porém percebeu-se que tal definição era muito vaga e não suficiente para o desenvolvimento da Matemática, uma vez que, em 1901, Russel fez uma construção que atualmente é conhecida como o Paradoxo de Russel, explorando o fato de que até então definição de conjuntos dava espaço a ideia da existência de um conjunto de todos os conjuntos. A partir de então, vários matemáticos se debruçaram sobre o problema de criar axiomas para que pudesse ser estabelecida uma Teoria dos Conjuntos baseadas em regras para a formação de objetos que se chamariam conjuntos. Em 1904, Zermelo apresenta à comunidade matemática uma possível coleção de axiomas para a Teoria dos Conjuntos que, com pequenas alterações, é conhecida atualmente como os Axiomas de Zermelo-Fraenkel.

No primeiro capítulo definimos o que vêm a ser Axiomas e Sistemas Axiomáticos, os axiomas de Zermelo - Fraenkel e suas importâncias, definições, propriedades e operações com conjuntos. No segundo capítulo temos as seções com as definições de relações de ordem, do Axioma da Escolha, do Lema de Zorn e do Teorema de Zermelo. No terceiro capítulo, abordamos as equivalências do Axioma da Escolha e cinco aplicações do mesmo em diversas áreas da Matemática, tais como Álgebra Linear, Teoria dos Conjuntos e Análise.

Este texto foi completamente inspirado em [4], [5], [6] e [13].

Capítulo 1

Axiomas e Sistema Axiomático

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria dos conjuntos sobre uma base axiomática e, portanto, bastante abstrata, com o intuito de construir um sistema geral que sirva de modelo para futuras investigações além do campo da Teoria dos Conjuntos. No século XIX, criou - se a Escola Formalista de David Hilbert, onde sua filosofia concentrava em *"Toda Matemática é sustentada por um sistema abstrato"*, em oposição a tal pensamento, existe a Escola Intuicionista, que se manisfesta contrária ao ponto de vista axiomático. Porém, ambas as escolas apresentam deficiência, uma vez que a Formalista apresenta sistemas abstratos que não podem se autoexplicar, tal afirmação é justificada pelo Teorema da Incompletude de Gödel, o qual veremos posteriormente; já a Intuicionista não permite generalizações sobre a estrutura da Matemática.

Em 1931, Kurt Gödel (1906 - 1978), então com vinte e cinco anos, publicou o artigo, cujo titulo pode ser traduzido por "Sobre Proposições Formalmente Indecidíveis dos *Principia Mathematica* e Sistemas Relacionados", no qual apresentou os seus dois Teoremas de Incompletude, que estão entre os teoremas mais profundos e com consequências mais marcantes de toda a Lógica Matemática e Lógica em geral. Tais teoremas surgiram como resultado das investigações de Gödel quando abordava a questão da consistência dos fundamentos da Matemática, segundo linhas estabelecidas por Hilbert, e vieram fornecer uma perspectiva completamente nova sobre o possível alcance de todo o movimento de fundamentação da Matemática nos sistemas lógicos formais que tinham vindo a ser desenvolvidos.

1.1 Axiomas e Sistema Axiomático

Definição 1.1.1 *(Axiomas): São verdades inquestionáveis universalmente válidas, muitas vezes utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação.*

A palavra axioma deriva da grega *axios*, cujo significado é digno ou válido. Em muitos contextos, axioma é sinônimo de postulado, lei ou princípio.

Definição 1.1.2 *(Axiomático): É algo evidente, inquestionável, incontestável, é relativo aos axiomas.*

Definição 1.1.3 *(Sistema Axiomático): É o conjunto dos axiomas que definem uma determinada teoria e que constituem as verdades mais simples a partir das quais se demonstram os novos resultados dessa teoria.*

Os sistemas axiomáticos têm papel de destaque nas ciências exatas, nomeadamente na Matemática e na Física, sendo os resultados demonstrados nas múltiplas teorias dessas ciências usualmente designados por teoremas ou leis. Suas aplicações estão relacionadas a diversas áreas do conhecimento, tais como lógica, matemática, engenharia, dentre outras. O sistema axiomático existente na lógica é uma forma de teoria dedutiva, que foi construída por meios de termos iniciais, onde seu desenvolvimento se deu através de regras de definição. Já na Matemática, o sistema axiomático é um conjunto de axiomas que podem ser usados para a derivação de Teoremas. Entre as diversas axiomáticas da Matemática e da Física ganharam notoriedade os Princípios de Euclides na Geometria Clássica, os Axiomas de Peano na Aritmética, as Leis de Newton na Mecânica Clássica e os Postulados de Einstein na Teoria da Relatividade.

No âmbito da Matemática, temos alguns sistemas axiomáticos que possibilitaram uma melhor compreensão ao seu respeito, como por exemplos,

(I) Axiomas de Peano (AP):

AP_1 : Zero é um número natural;
AP_2 : Zero não é sucessor de nenhum número natural;
$AP_{3]:}$ O sucessor de um número natural é um número natural;
AP_4 : Dois números naturais que tiverem o mesmo sucessor são iguais;
AP_5 : Se zero possuir uma propriedade P, e se do fato de um número natural qualquer n possuir P, isto acarreta que n'(sucessor de n) também a possui, então todo número natural possui a propriedade P.

Este último axioma também é conhecido matematicamente como *Princípio da Indução Finita - P.I.F.* ou *axioma da indução.*

Este axioma é a base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais (demonstrações por indução, ou por recorrência). Enunciado sob a forma de propriedades em vez de conjuntos, ele se formula assim:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

(i) $P(1)$ é válida;

(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n')$, onde n' é o sucessor de n; Então $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n.

Exemplo: Demonstrar que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2.

Resolução: Indicaremos por S_n a soma procurada

$$S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1),$$

então pelo P.I.F. temos:

(i) Para $n = 1$, a hipótese é válida, pois $S_1 = 1^2 = 1$.

(ii) Se, para $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ for verdadeira, então queremos provar que $P(n+1)$ também o é, ou seja, que:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2. \quad (1)$$

Mas, note que, por hipótese, temos que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2,$$

logo em (1), temos que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Portanto, temos que $P(n)$ é verdadeiro implica que $P(n+1)$ também é verdadeiro.

Logo, a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2.

(II) Axiomas de Euclides(AE):

AE_1 : Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos;
AE_2 : Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em linha reta;
AE_3 : Pode-se traçar um circulo com qualquer centro e com qualquer raio;
AE_4 : Todos os ângulos retos são iguais;
AE_5 : Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela a reta dada.

Tais sistemas são de fundamentais importância para a Matemática, pois respectivamente, eles serviram como base para o estudo da aritmética elementar e da Geometria Plana Euclidiana.

Definição 1.1.4 *(Teorema): É uma proposição que pode ser demonstrada de uma maneira lógica a partir de um axioma ou de outros teoremas que tenham sido previamente demonstrados.*

O teorema pode ser descrito como uma afirmação de importância. Existem afirmações de menor ordem, como *lema* (uma afirmação que pertence a um teorema maior), o *corolário* (afirmação que segue de forma imediata ao teorema) ou a *proposição* (um resultado que não se encontra associado a nenhum teorema específico). Convém destacar que, enquanto a afirmação não for demonstrada, não passa então de uma *hipótese* ou de uma *conjectura*.

Um dos teoremas mais populares é o que conhecemos pelo nome de *Teorema de Tales*, segundo o qual nos diz que, se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra. Como consequência deste teorema temos que, se traçarmos num triângulo uma linha que seja paralela a alguns de seus lados intersectando os outros dois, obtemos dois triângulos semelhantes (isto é, duas figuras com ângulos internos idênticos e lados proporcionais).

Outro teorema igualmente popular é o *Teorema de Pitágoras*, o qual defende que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Com isso temos que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (ou seja, o lado de maior comprimento e que se opõe ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos catetos (isto é, os dois lados menores do triângulo retângulo).

Cantor, em sua obra, concentrava-se no conceito básico de conjuntos, este continuava a ser definido a um nível meramente intuitivo. Para ele, um conjunto poderia ser identificado, quer designando os seus elementos (*extensão*), quer indicando uma propriedade que os caracterizasse (*compreensão*), e esta concepção informal conduzia ao aparecimento de vários paradoxos, como o Paradoxo de Russel - que veremos mais adiante. Cantor estava bem consciente destas dificuldades, reconhecendo que não poderia existir o conjunto de todos os conjuntos, e admitia que há propriedades que determinam conjuntos e outras não, sem que tivesse apontado um critério bem definido para decidir sobre isso.

Tornava-se evidente a necessidade de tratar a noção de conjunto de uma forma rigorosa e a Teoria de Zermelo-Fraenkel vem precisamente dar resposta a este problema, regulamentando axiomaticamente o conceito de conjunto. Esse sistema axiomático pretende incorporar o conceito intuitivo de conjuntos que os matemáticos, de fato, usam.

Os axiomas de Zermelo-Fraenkel podem ser expressos como fórmulas Lógicas da Teoria dos Conjuntos. Representa-se usualmente por ZFC o conjunto destes axiomas, sendo que a letra C (do inglês *choice*) nesta abreviatura se refere à inclusão do Axioma da Escolha; naturalmente, ZF representa o conjunto de todos esses axiomas exceto este último. Quando interpretados numa estrutura desta Lógica, os axiomas traduzem propriedades do universo correspondente, aqui considerado como um universo de conjuntos. Genericamente, um *conjunto* será então um elemento de uma estrutura desta linguagem que satisfaça os axiomas de ZFC.

1.2 Os Axiomas de ZFC

Com a finalidade de garantir que um conjunto esteja sempre univocamente determinado, vamos introduzir alguns princípios básicos em nossa teoria.

Axioma da Compreensão ou **Axioma de especificação** diz que se um conjunto A existe e conseguimos descrever (através de uma propriedade) elementos deste conjunto, então existe um conjunto B, subconjunto de A, que contém esses elementos.

Definição 1.2.1 *Se A é um conjunto e x é um elemento que pertence a esse conjunto, então escrevemos $x \in A$ e dizemos que x pertence a A. Se A é um conjunto e x um elemento que não pertence a esse conjunto, então escrevemos $x \notin A$ e dizemos que x não pertence a A.*

O conceito de *pertinência* dado por $x \in A$ ou $x \notin A$ é um conceito primitivo e, ainda, o principal da teoria dos conjuntos.

1 - Axioma da Extensão:

Sejam A e B conjuntos, temos que estes conjuntos são iguais, se e somente se, todos os elementos de A forem os mesmos elementos de B.

Esse axioma, muito conhecido, afirma que um conjunto é determinado pela sua extensão, pelo seu tamanho, isto é, é determinado pelos seus membros. Tal axioma reflete a ideia de que dois conjuntos são iguais se tem a mesma extensão, isto é, se possuem os mesmos elementos.

Exemplo:

A: é o conjunto das soluções da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$;

B: é o conjunto dos dois primeiros naturais inteiros positivos e primos.

Como os elementos desses dois conjuntos são exatamente 2 e 3, então os conjuntos A e B coincidem, ou seja $A = B$.

A partir do axioma da extensão, podemos definir a operação de inclusão entre conjuntos como segue:

Definição 1.2.2 *Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A está contido em B, representado por $A \subseteq B$, se e somente se, cada elemento de A também é um elemento de B.*

Simbolicamente, temos que: $A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x$, se $x \in A$, então $x \in B$.
Exemplo: Sejam $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, podemos afirmar que $B \subset A$, uma vez que todos os elementos de B estão contidos em A.

Neste caso, se todos os elementos de A estão contidos em B, dizemos que A é um *subconjunto* de B, ou que B contém A.

A relação de inclusão é de muita importância, pois quase todas as demonstrações de igualdade entre dois conjuntos A e B, podem ser separadas em duas partes: primeiro mostramos que $A \subseteq B$ e, a seguir, que $B \subseteq A$.

Observação 1.2.1 *: Convém lembrar que as relações de pertinência $\in$ e de inclusão $\subseteq$ são conceitualmente diferentes, uma vez que as relações de pertinência refere - se a elementos e conjuntos, e as de inclusão estão relacionadas entre conjuntos.*

Observação 1.2.2 *Com esta definição de inclusão, podemos reescrever a igualdade de conjuntos como: Dados A e B conjuntos, temos que $A = B$ se, e somente se, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Simbolicamente, $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.*

Ao afirmar que dois conjuntos são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos, a teoria fornece naturalmente a relação de *igualdade* entre conjuntos. Sendo assim, escrevemos que $A = B$ para indicar que $x \in A$ se, e somente se, $x \in B$. A igualdade é simétrica, no sentido de que se $A = B$, então $B = A$.

2 - Axioma do Conjunto Vazio:

O axioma garante que existe um conjunto X para o qual não há elementos pertencentes. Tal conjunto é denominado conjunto vazio e é designado por $\emptyset$.

Este conjunto, que não tem elementos, tem como ideia intuitiva uma propriedade que não pode ser satisfeita, por exemplos:

- O conjunto dos números reais tais que $x^2 = -4$.

- O conjunto dos números positivos múltiplos de 7 menores que 5.

3 - Axioma do Par (não-ordenado):

Para qualquer a ou b existe um conjunto Z, representado por $\{a, b\}$, que contém exatamente a e b.

O conjunto $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ é um tipo especial de par denominado par ordenado, mas que é passível de construção a partir do axioma acima.

4 - Axioma do Conjunto União:

Para cada X existe um conjunto $Y = \bigcup X$, ou seja, a união de todos os elementos constituintes de X. Sendo assim, temos que, dados X e Y, existe Z de modo que $Z = X \cup Y$, isto é, t é elemento de Z se, e somente se, $t \in X$ ou $t \in Y$.

5 - Axioma do Infinito:

Existe um conjunto Y que contém o conjunto vazio $\emptyset$, e para cada $X \in Y$, o conjunto $\{X\}$ também pertence a Y.

Esse axioma permite a construção de um conjunto infinito onde $y \cup \{y\}$ é o sucessor de y e o processo de construção inicia pelo conjunto $\varnothing$.

6 - Axioma da Substituição:

Se a relação obtida de $P(x, y)$ é uma relação funcional em x e y, então dado um conjunto B, existe um conjunto A, cujos os elementos são aqueles elementos de B que satisfazem a fórmula $P(x, y)$, isto é, $A = \{z \in B; P(x, z)\}$.

7 - Axioma do Conjunto Potência:

Para cada conjunto existe um conjunto cujos membros são exatamente os subconjuntos do conjunto dado, ou seja, este axioma nos diz que existe um conjunto y para cada x formado por todos os subconjuntos de x. Embora o conjunto da potência y seja definido através de uma propriedade, ele não está incluído no Axioma da Substituição porque y não é dado como amplitude de qualquer função. Além disso, a cardinalidade do conjunto potência de x será sempre superior à cardinalidade do conjunto x.

8 - Axioma da Escolha:

$$\forall X, \exists \phi, \text{ onde } \phi \text{ é uma função tal que } Dom(\phi) = x - \{\emptyset\}$$

e

$$\forall y (y \in Dom(\phi)) \to \phi(y) \in y, \text{ onde } x - \{\emptyset\}$$

representa todos os subconjuntos não-vazios de X.

Este é o famoso Axioma da Escolha, que veremos com mais detalhe posteriormente e que é utilizado para demonstrarmos o Lema de Zorn, ele afirma que sempre podemos efetuar uma quantidade infinita de escolhas mesmo sem termos qualquer propriedade que defina a função de escolha.

O axioma da escolha tem muitas formas equivalentes, normalmente tratadas nos textos de teoria dos conjuntos, por exemplo:
O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é, ainda, não vazio. Mais precisamente, dado um conjunto de índices I e uma função ϕ com domínio em I, se, para todo $i \in I$, $\phi(i) \neq \emptyset$, então $\prod_{i \in I} \phi(i) \neq \emptyset$.

9 - Axioma da Regularidade:

Este último axioma garante que cada conjunto não-vazio x contém um elemento minimal com respeito à relação $\in$. A ideia por trás do axioma consiste no desejo de que todos os conjuntos sejam construídos a partir do conjunto $\emptyset$, evitando a ocorrência de cadeias descendentes e infinitas com relação à pertinência $\in$.

De uma forma geral, um *conjunto* é uma coleção de objetos e esses objetos são denominados de *membros* ou *elementos* do conjunto.

Munidos dos Axiomas do Conjunto Vazio e da Extensão, podemos demonstrar que o conjunto que não tem elementos é único.

Proposição 1.2.1 : *Existe apenas um conjunto que não tem elementos e a este conjunto dá-se o nome de conjunto vazio e é denotado por* $\emptyset$.

Prova. Sejam A e B dois conjuntos sem elementos. Se A e B são conjuntos distintos, então eles não possuem os mesmos elementos, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$,ou existe $x \in B$ tal que $x \notin A$. Nos dois casos, temos uma contradição, pois A e B não possuem elementos. Assim, A e B não podem ser conjuntos distintos. ∎

1.3 Operações entre conjuntos

1. **União (Reunião):**

Dados os conjuntos A e B, então pelo axioma da união, existe um conjunto C tal que $x \in C$ se, e somente se, $x \in A$ ou $x \in B$. Denotamos tal conjunto por $C = A \cup B$.

Exemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, então temos que $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é o conjunto união de A e B, isto é $C = A \cup B$.

2. **Diferença e Interseção:**

Proposição 1.3.1 : *Se* A *e* B *são conjuntos.*

(i) Existe um conjunto C *tal que* $x \in C$ *se, e somente se,* $x \in A$ *e* $x \notin B$.

(ii) Existe um conjunto D *tal que* $x \in D$ *se, e somente se,* $x \in A$ *e* $x \in B$.

Prova. Consideremos a propriedade $R(x, B)$ de x e B com o significado '$x \notin B$'. Pelo axioma da compreensão, para todo B e para todo A, existe um conjunto D tal que $x \in D$ se, e somente se, $x \in A$ e $R(x, B)$, ou seja, se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin b$ e a propriedade (i) está provada.
(ii) Pelo Axioma da União e pelo Axioma da Especificação, existe um conjunto $A \cap B = \{x \in A \cup B / x \in A \text{ e } x \in B\}$, e será único pelo Axioma da Extensão. Se temos os conjuntos A, B e C, basta primeiro considerar o conjunto $A \cap B$ que tem sua existência garantida pela parte anterior, e como ele é um conjunto, basta fazer a interseção entre os conjuntos $A \cap B$ e C para obter o conjunto $A \cap B \cap C$. Sendo

assim, temos que para dados dois conjuntos A e B, $A \cap B = \{x \in A \cup B / x \in A$ e $x \in B = \{x \in A / x \in B\}$. ■

Segue da proposição anterior que os conjuntos C e D são únicos e são chamados, respectivamente, de *diferença* e *intersecção* de A e B, e são representados por $A - B$ e $A \cap B$, respectivamente.

Observação 1.3.1 *Pode ocorrer que não exista elemento algum x tal que $x \in A$ e $x \in B$. Neste caso, tem-se que $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A e B dizem-se disjuntos.*

Exemplo: Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}; x > 5\}$. Então $A \cup B = \mathbb{N}$ e $A \cap B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

Exemplo: Sejam $A = \{x \in \mathbb{N}; x > 2\}$ o conjunto dos números naturais maiores do que 2 e $B = \{x \in \mathbb{N}; x < 3\}$ o conjunto dos números naturais menores do que 3. Então $A \cap B = \{\emptyset\}$, pois não existem números naturais x tais que $2 < x < 3$. Assim os conjuntos A e B são disjuntos.

Uma relação fundamental das operações entre conjuntos é que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo: Sejam $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ temos que: $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, porém note que, $n(A) = 5$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$ e $n(A \cup B) = 9$, o que satisfaz a relação anterior.

3. **Complementar de B em A:**

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se *complementar de B em relação a A* o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B. Utilizamos o símbolo C_A^B para indicar o complementar de B em relação a A. Notemos que C_A^B só é definido para $B \subset A$, e assim temos:

$$C_A^B = A - B.$$

Exemplo: Sejam $A = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $B = \{3, 5, 6\}$, note que $B \subset A$ e assim C_A^B está definida e podemos determinar por: $C_A^B = A - B = \{2, 7, 8, 9\}$.
Pelo **axioma do conjunto potência**, temos que para cada conjunto y, existe outro conjunto, cujos membros são exatamente os subconjuntos de y.

Definição 1.3.1 *Dado um conjunto A, então chamamos de* ***Conjunto das Partes****, o conjunto formado pelos subconjuntos de A e o indicamos por $\wp(A)$.*

Exemplo: Dado o conjunto $A = \{2, 3, 4\}$, então temos que:

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Perceba que o conjunto A possui 3 elementos e o conjunto (A) contém 8 elementos. De uma forma geral, temos que, se um conjunto A é finito, então é possível determinar a cardinalidade do conjunto $\wp(A)$ e seu valor é dado por 2^n, onde n é o número de elementos do conjunto A.

Com esses elementos teóricos podemos evitar o Paradoxo de Russell.

O Paradoxo de Russell:

Paradoxo é uma palavra que é usada para significar uma contradição apenas aparente, que pode ser resolvida. Mas, às vezes, tem o significado de contradição verdadeira e insolúvel.

Dentre os muitos paradoxos que foram sendo descobertos, merece especial atenção o chamado *Paradoxo de Russell*, que está contido numa carta que Bertrand Russell (1872-1970) escreveu a Gottlob Frege (1848-1925) em 1902. Frege recebeu a carta de Russell no momento em que estava para publicar o segundo volume de uma obra em que fundamentava toda a aritmética na teoria dos conjuntos.
Ele reagiu com as seguintes palavras: "Nada mais indesejável para um cientista do que ver ruir os fundamentos do edifício, justamente no momento em que ele está sendo concluído. Foi nessa incômoda situação que me encontrei ao receber uma carta do Sr. Bertrand Russell no momento em que meu trabalho já estava indo para o prelo ".

Os axiomas de Cantor, entre eles o axioma da compreensão, eram os axiomas utilizados anteriormente aos axiomas de Zermelo. E este sistema axiomático que gerou o Paradoxo.

(Paradoxo de Russell): Existe um conjunto de todos os conjuntos.

Para explicar o paradoxo de Russell, começamos observando que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, como por exemplo, o conjunto das partes de um dado conjunto; uma reta é um conjunto de pontos; e podemos formar o conjunto das retas de um dado plano, portanto, um conjunto de conjuntos. Um conjunto pode ser elemento de si mesmo, como o conjunto de todas as ideias abstratas, pois tal conjunto também é uma ideia abstrata; portanto, ele é um elemento de si mesmo.

Outro exemplo: o conjunto dos conjuntos que possuem mais de dois elementos é um elemento de si mesmo, pois ele, com certeza, possui mais de dois elementos.

Teorema 1.3.1 *Não existe o conjunto que contém todos os conjuntos.*

Prova. Suponhamos que exista V, o conjunto de todos os conjuntos. Seja $B = \{x \in V / x \notin V\}$. Pela definição de B, temos que: $B \in B \Leftrightarrow B \notin B$, o que é uma contradição. Desta forma, não existe V. ∎

Capítulo 2

Axioma da Escolha, Lema de Zorn e Teorema de Zermelo

2.1 Noções Básicas

Antes de falarmos especificamente sobre Axioma da Escolha, Lema de Zorn e Teorema de Zermelo, vamos introduzir alguns conceitos básicos necessários para tal desenvolvimento.

Em 1921, Kazimierz Kuratowski, elaborou a mais simples definição de *par ordenado*:

Definição 2.1.1 *Dizemos que (x, y) é um par ordenado, quando:*

$$(x, y) = \{\{x\}\ , \{x, y\}\}.$$

Ao considerarmos que X e Y são conjuntos, pelo axioma do par, temos que existem os conjuntos $\{x\} = \{x, x\}$ *e* $\{x, y\}$. Novamente aplicando o axioma do par, temos que $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ é um conjunto. Com esta definição de par ordenado faz desnecessária a criação de um novo axioma que passe a ideia de par ordenado, com isto conseguimos mostrar a igualdade de par ordenado através da igualdade de conjuntos que já foi axiomado. Um fato importante dessa definição é que para indicar uma *tripla ordenada* basta representarmos por:

$$(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}.$$

Definição 2.1.2 *Dados dois conjuntos A e B, a coleção de todos os pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$ é o produto cartesiano de A por B e é denotado por:*

$$A \times B = \{(x, y)\ \diagup x \in Aey \in B\}.$$

Proposição 2.1.1 *O produto cartesiano $A \times B$ é um conjunto, ou seja, se $x \in E$ e $y \in E$, então $(x, y) \in \wp(\wp(E))$.*

Prova. Se $x \in E$ e $y \in E$, então $\{x\} \subseteq E$ $\{x, y\} \subseteq E$. Daí, $\{x\} \in \wp(E)$ e também $\{x, y\} \in \wp(E)$. Portanto, $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(E)$ e, finalmente, temos $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(E))$. ■

Proposição 2.1.2 *Para quaisquer conjuntos A e B, existe um conjunto cujos elementos são exatamente os pares (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.*

Prova. A partir do axioma da compreensão, podemos construir o conjunto $\{z \in \wp(\wp A \cup B)) / z = (x, y)\}$ para algum x em A e algum y em $B\}$. Com isto, temos que esse conjunto contém somente pares do tipo desejado e, pela proposição anterior, o conjunto contém todos eles. ■

Observação 2.1.1 *Devido as proposições anteriores, temos que o produto cartesiano de dois conjuntos é ainda um conjunto.*

Definição 2.1.3 *Uma relação binária é qualquer subconjunto de $A \times B$.*

Seja R uma relação binária, com $R \subseteq A \times B$. Geralmente, escrevemos xRy para representar $(x, y) \in A \times B$.

Observação 2.1.2 *Em geral, quando tratarmos a respeito de relações binárias, diremos apenas relações.*

Seja R uma relação de A em B ou simplesmente uma relação em $A \times B$, então temos:

Definição 2.1.4 *O domínio de R, denotado por Dom(R), é definido por:*

$$Dom(R) = \{x \in A / (x, y) \in R \quad \text{para algum} \quad y \in B\}.$$

Definição 2.1.5 *A imagem de R, denotado por Im(R), é definida por:*

$$Im(R) = \{y \in B / (x, y) \in R \quad \text{para algum} \quad x \in A\}.$$

Definição 2.1.6 *O campo de R, denotado por Camp(R), é dado por:*

$$Camp(R) = Dom(R) \cup Im(R).$$

Exemplo: Seja $R = \{(3, 4), (5, 6), (6, 7)\}$. Então:

$$Dom(R) = \{3, 5, 6\};\ Im(R) = \{4, 6, 7\};\ Camp(R) = \{3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Proposição 2.1.3 *Se R é uma relação, então $Camp(R)$, $Dom(R)$ e $Im(R)$ são conjuntos.*

Prova. O axioma da compreensão garante que $Dom(R)$ e $Im(R)$ são conjuntos, pois são subconjuntos dos conjuntos A e B, respectivamente. E como $Camp(R)$ é união de conjuntos, então também é conjunto. ∎

Se R é uma relação em A, então as seguintes propriedades são definidas para R:

(i) R é *reflexiva* quando, para todo $x \in A$, xRx;

(ii) R é *simétrica* quando, para todos $x, y \in A$, se xRy , então yRx;

(iii) R é *transitiva* quando, para todos $x, y, z \in A$, se xRy e yRz , então xRz;

(iv) R é *antissimétrica* quando, para todos $x, y \in A$, se xRy e yRx , então $x = y$;

(v) R é *irreflexiva* quando, para todo $x \in A$, $(x, x) \notin R$, isto é, x não se relaciona com x.

Quando uma relação R sobre A satisfaz os itens (i), (ii) e (iii), então essa relação é chamada de **Relação de Equivalência**.

A relação de equivalência desempenha um papel importante na Matemática como um modo de generalizar a relação de igualdade, em situação que indivíduos embora distintos possam executar um papel equivalente.

Exemplo: Em $\mathbb{Z}$, a relação xRy se, e somente se, "$x - y$ é um múltiplo de 5" é uma relação de equivalência, pois:

(i) (reflexiva): para todo $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x - x = 0 = 0 \cdot 5$, ou seja xRx;

(ii) (simétrica): se xRy, então $x - y = 5 \cdot n$, com $n \in \mathbb{Z}$ e, então $y - x = 5 \cdot (-n)$, ou seja, yRx;

(iii) (transitividade): se xRy e yRz , então $x - y = 5 \cdot n$ e $y - z = 5 \cdot m$, com $n, m \in \mathbb{Z}$. Então $x - z = x - y + y - z = 5 \cdot n + 5 \cdot m = 5 \cdot (n + m)$ e, portanto, xRz.

Definição 2.1.7 *: Sejam X e Y conjuntos. Uma **função** é uma terna (f, X, Y), sendo f uma relação em $X \times Y$, satisfazendo:*

(i) $Dom(f) = X$,

(ii) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$. Se $(x, y) \in f$, escrevemos $y = f(x)$.

Definição 2.1.8 *Chamamos de **função injetora**, quando para todo x e z diferentes, tais que ambos pertençam a X, temos $f(x) = y$ e $f(z) = y$ se, e só se, $x = z$.*

Definição 2.1.9 *Chamamos de **função sobrejetora**, quando para todo y pertencente a Y , existe um x pertencente a X, tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, f é uma sobrejeção se, e somente se, $Im(f) = Y$.*

Definição 2.1.10 *Chamamos de **função bijetora** ou correspondência um a um, quando ela for injetora e sobrejetora.*

Definição 2.1.11 *Uma relação Id_A é dita **identidade**, quando $Id_A = \{(x, x) : x \in A\}$.*

Teorema 2.1.1 $xId_Ax \leftrightarrow x \in A$.

Prova. Desde

$$(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\} = \{\{x\}\},$$

fica claro que

$$Id_A \subseteq \wp(\wp(A)).$$

Além disso, temos que

$$x \in A \rightarrow \{\{x\}\} \in \wp(\wp(A)). \qquad (i)$$

Em virtude do axioma da separação, podemos usar (i) para obter o teorema. ■

2.2 Relações de Ordem

Definição 2.2.1 *Uma relação é dita de **parcialmente ordenada** quando a relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva.*

Sendo assim, a relação de inclusão de conjuntos $(\subset)$ é um exemplo de ordem parcial, pois:

Sejam os conjuntos A, B e C, temos que:

(i) $A \subset A$;

(ii) $A \subset B$ e $B \subset A$, então temos que $A = B$;

(iii) $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Outro exemplo clássico de uma relação de ordem parcial é a relação "menor ou igual"$(\leq)$:

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, diz - se *m é menor do que n*, e escreve - se $m < n$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

A relação $m < n$ tem as seguintes propriedades:

(i) (*Transitividade*): Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$;

(ii) (*Tricotomia*): Dados $m, n \in \mathbb{N}$, vale uma e, somente uma, das alternativas: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$;

(iii) (*Monotonicidade*): Se $m < n$ então, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, tem-se $m+p < n+p$ e $mp < np$.

Definição 2.2.2 *Uma relação é chamada de* ***totalmente ordenada*** *quando dados quaisquer dois elementos de um conjunto existe uma relação entre eles. Uma* ***cadeia*** *é um subconjunto totalmente ordenado de um conjunto parcialmente ordenado, ou seja, uma cadeia C é um subconjunto de X tal que quaisquer dois elementos são comparáveis.(isto é, se $x, y \in C$ então $x \leq y$ ou $y \leq x$).*

Definição 2.2.3 *Um conjunto* ***parcialmente ordenado****, é um conjunto que contém uma relação de ordem parcial. Analogamente, um conjunto* ***totalmente ordenado****, é aquele que contém uma relação de ordem total.*

Observação 2.2.1 *Dado um conjunto A, então $\wp(A)$ com a relação da inclusão e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ munido da relação menor ou igual ($\leq$) são exemplos, respectivamente, de conjuntos parcialmente ordenado e totalmente ordenado.*

Definição 2.2.4 *Seja A um conjunto parcialmente ordenado, então o elemento a é chamado de* ***elemento minimal****, se para todo $x \in A$ tal que $x \leq a$ temos que $x = a$.*

Definição 2.2.5 *Seja A um conjunto parcialmente ordenado, então a é considerado* ***elemento maximal****, se para todo $x \in A$, tal que $a \leq x$ temos que $x = a$.*

Definição 2.2.6 *Seja X um conjunto parcialmente ordenado, então a é denominado* ***cota inferior*** *de E, se $E \subseteq X$, e para todo $x \in E$, temos que $a \leq x$.*

Definição 2.2.7 *Dado X um conjunto parcialmente ordenado, então a é chamado* ***cota superior*** *de E, se $E \subseteq X$, e para todo $x \in E$, temos que $x \leq a$.*

2.3 Boa Ordenação

Um conjunto parcialmente ordenado pode não possuir um menor elemento, e, mesmo que o tenha, é perfeitamente possível que algum subconjunto não o tenha.

Definição 2.3.1 *Um conjunto parcialmente ordenado é dito* ***bem ordenado*** *(e sua ordem é chamada* ***boa ordenação****) se todo subconjunto não-vazio desse conjunto possuir um menor elemento.*

Uma consequência desta definição, que merece ser mencionada antes mesmo de procurarmos exemplos e contraexemplos, é que todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado.

A boa-ordenação pode muitas vezes substituir com vantagem a indução como método de prova de resultados referentes a números naturais.

Exemplo: Lembremos que um número natural p chama-se *primo* quando não pode ser expresso como produto $p = mn$ de dois números naturais, a menos que um deles seja igual a 1 (e o outro igual a p); isto equivale a dizer que os fatores m, n não podem ser ambos menores do que p. Um resultado fundamental em Aritmética diz que todo número natural é primo ou é um produto de fatores primos. Provaremos isto por boa-ordenação. Usaremos a linguagem de conjuntos. Seja X o conjunto dos números naturais que são primos ou produtos de fatores primos. Observemos que se m e n pertencem a X então o produto mn pertence a X. Seja Y o complementar de X. Assim, Y é o conjunto dos números naturais que não são primos nem são produtos de fatores primos. Queremos provar que Y é vazio. Isto será feito por redução ao absurdo (como sempre se dá nas demonstrações por boa-ordenação). De fato, se Y não fosse vazio, haveria um menor elemento $a \in Y$. Então todos os números menores do que a pertenceriam a X. Como a não é primo, ter-se-ia $a = m \cdot n$, com $m < a$ e $n < a$, sendo assim $m \in X$ e $n \in X$. Portanto, $mn \in X$. Porém $mn = a$, o que daria $a \in X$, uma contradição. Segue então que $Y = \emptyset$, o que nos permite concluir a demonstração.

Uma aplicação bem interessante relacionado aos conjuntos bem ordenados é que a partir dele podemos demonstrar propriedades a respeito de seus elementos por um processo idêntico ao da indução matemática.

Proposição 2.3.1 *Todo conjunto bem ordenado é totalmente ordenado.*

Prova. Seja $(X, \leq)$ um conjunto bem ordenado. Então dados $x, y \in X$ temos que $\{x, y\}$ possui um menor elemento, ou seja, $x \leq y$ ou $y \leq x$. Portanto, podemos concluir que X é um conjunto totalmente ordenado. ∎

Definição 2.3.2 : *Dizemos que um conjunto X satisfaz o Princípio da Indução Transfinita (P.I.T) se vale a seguinte propriedade:*

Se $S \subset X$ é tal que:

(i) S é totalmente ordenado;

(ii) $\forall x \in X (a \leq x, \forall a \in S \Longrightarrow x \in S)$.

Portanto, temos que se um subconjunto é tal que possui os antecessores de um elemento e o contém, então tal subconjunto é equivalente ao todo.

Tal princípio se diferencia do princípio de indução clássico principalmente em dois aspectos:

(i): A indução transfinita, ao invés se aplicar apenas no elemento e no seu antecessor, é aplicado nele e em todos os elementos do conjunto de antecessores ao mesmo.

(ii): Para a indução transfinita, não temos afirmações sobre o elemento inicial.

Se X é bem ordenado, então X satisfaz o P.I.T.

Prova. (do princípio da indução transfinita) Se $X - S$ não é um conjunto vazio, então possui um menor elemento, suponhamos x. Sendo assim, os antecessores de x pertencem a S. Ora, por hipótese de indução, temos que x não pertence a S. O que gera uma contradição, visto que x não pode pertencer simultaneamente a S e a $X - S$. Logo, $X - S$ é um conjunto vazio. ∎

2.4 Axioma da Escolha

Um breve histórico a respeito do Axioma da Escolha mostra que tal axioma é talvez o mais controvertido axioma da Teoria dos Conjuntos e mesmo de toda Matemática.

Esse axioma foi introduzido por Zermelo, em 1904, e desde o surgimento existe um acalorado debate sobre aceitar ou não esse axioma nos domínios matemáticos.

De um modo geral, a aceitação ou rejeição do Axioma da Escolha reporta sobre concepções filosóficas sobre a natureza da Matemática.

O enunciado desse axioma, como veremos a diante, retrata sobre a existência de algum conjunto como acontece com outros axiomas de Zermelo - Fraenkel (ZF). Entretanto, para os outros axiomas de ZF, com tal caráter, observamos sua unicidade, enquanto o Axioma da Escolha assegura apenas que existe um certo conjunto, porém não caracteriza os elementos por ele gerados.

O Axioma da Escolha é equivalente a alguns teoremas importantes da Matemática usual e implica em muitíssimos outros resultados. Mostraremos, no próximo capítulo, que o Axioma da Escolha é equivalente ao Princípio da Boa Ordem (Teorema de Zermelo) e ao Lema de Zorn.

Antes de abordarmos propriamente o Axioma da Escolha, iniciaremos por observar que um conjunto é ou não vazio e, se não for, pela definição de conjunto não-vazio, há nele um elemento. Se X e Y são conjuntos, e se um deles é vazio, então o produto cartesiano $X \times Y$ é vazio. Se nem X ou Y são vazios, então existe um elemento x em X, e há também um elemento y em Y; segue-se que o par ordenado (x, y) pertence ao produto cartesiano $X \times Y$ de modo que $X \times Y$ é não-vazio.

Falaremos a seguir, sobre o que vem a ser um produto cartesiano de uma família infinita de conjuntos, uma vez que sabemos determinar o produto cartesiano de dois conjuntos (ver definição 2.1.2), tal definição pode ser ampliada para o produto cartesiano de uma família finita de conjuntos, porém não pode ser aplicada para uma família infinita de conjuntos. Portanto, definimos o produto cartesiano de uma família infinita de conjuntos por:

Definição 2.4.1 : *Seja $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ uma família de conjuntos. O produto cartesiano ΠA_α é conjunto de todas as funções*

$$c : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha,$$

que tem a propriedade de para todo $\alpha \in I, c(\alpha) \in A_\alpha$.

Axioma da Escolha: O produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não-vazio.

Em outras palavras, se $\{X_i\}$ é uma família de conjuntos não-vazios indexada por um conjunto I não-vazio, então existe uma família $\{x_i\}, i \in I$, tal que $x_i \in X_i$ para cada i em I.

Suponha que C é uma coleção não-vazia de conjuntos não-vazios. Podemos considerar C como uma família. O axioma da escolha então diz que o produto cartesiano de conjuntos de C possui pelo menos um elemento. Um elemento de tal produto cartesiano é, por definição, uma função cujo domínio é o conjunto dos índices de c.

Portanto, podemos concluir que existe uma função f com domínio em C tal que se $A \in C$, então $f(A) \in A$.

Definição 2.4.2 *: Seja X um conjunto infinito então $f : \wp(X) - \{\emptyset\} \to X$, é dita uma* ***função escolha para o conjunto*** *X se $f(A) \in A$ para todo $A \in \wp(X) - \{\emptyset\}$.*

Sendo assim, uma função que neste sentido escolhe um elemento de cada subconjunto não-vazio de um conjunto X é denominada uma **função escolha** para X.

Usando esta definição, o axioma da escolha pode ser reescrito da seguinte maneira: "*Cada conjunto possui uma função escolha*".

A função escolha de um certo conjunto A, inclui no seu domínio todo subconjunto não-vazio de A e ele seleciona exatamente um elemento de cada tal subconjunto. Para adquirir algum entendimento para esta função escolha, podemos considerar um exemplo finito simples, para o qual o axioma não é necessário.

Exemplo: : Sejam $A = \{1, 2\}$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, então, há duas funções escolha distintas, f_1 e f_2 ,cujos domínios são subconjuntos não-vazios de A.

$$\begin{aligned} f_1(B_1) &= f_2(B_1) = 1 \\ f_1(B_2) &= f_2(B_2) = 2 \\ f_1(A) &= 1 \\ f_2(A) &= 2 \end{aligned}$$

Com este exemplo, podemos ter uma noção sobre uma função escolha.

Bertrand Russell forneceu uma comparação bastante interessante e curiosa para explicar o axioma da escolha: *para escolhermos uma meia de cada par de meias, dentre uma coleção infinita de pares de meias, precisamos usar o axioma da escolha; se forem sapatos, não precisamos.* Isto deve-se ao fato de que, para os sapatos podemos escolher o pé direito de cada par, porém para as meias, os pés de cada meia são indistinguíveis.

Historicamente, o axioma da escolha foi introduzido por Zermelo (1904), com a finalidade de provar que todo conjunto pode ser bem ordenado. Até a década de 70, provavelmente, a principal aplicação deste axioma em Matemática foi através do Teorema de Boa - Ordenação (que ficou conhecido posteriormente, como Teorema de Zermelo) e a aplicação da Indução Transfinita para a boa ordenação.

2.5 Lema de Zorn

Uma das consequências do Axioma da Escolha é o Lema de Zorn, que veremos adiante. Antes de aprofundarmos em tal lema, devemos lembrar que uma relação entre os elementos de um determinado conjunto, significa que os mesmos são comparáveis, isto é, podemos determinar uma comparação entre eles.

Já sabemos o que vem a ser uma cadeia (ver definição 2.2.2), então antes de abordarmos a respeito do Lema de Zorn, apresentaremos o Princípio de Cadeia Maximal, que servirá como base para a demonstração do Lema de Zorn.

Definição 2.5.1 *: Uma cadeia é dita* ***maximal****, se esta não estiver propriamente contida noutra cadeia.*

Proposição 2.5.1 *: Seja $(X, \leq)$ uma ordem parcial, então X tem uma cadeia maximal.*

O Lema de Zorn, de 1935, é um princípio cuja a propriedade crucial é a maximização de conjuntos parcialmente ordenados.

Definição 2.5.2 *(Lema de Zorn): Seja $(A, \leq)$ um conjunto ordenado. Se toda cadeia em $(A, \leq)$ tem uma cota superior, então $(A, \leq)$ contém um elemento maximal.*

Certamente Zorn, foi essencialmente antecipado por F.Hausdorff, C. Kuratowski e R.L. Moore, pelo menos. Diversas formulações variantes do Lema de Zorn surgiram, dentre as quais destacamos o Princípio Máximo de Hausdorff.

Hausdorff para formular tal princípio, utiliza-se da noção de cadeia máxima.

Definição 2.5.3 *(Princípio Máximo de Hausdorff): Se A é uma famíia de conjuntos, então toda cadeia de A é um subconjunto de uma cadeia máxima de A.*

Este princípio pode ser interpretado de uma forma mais simples, da seguinte maneira: "Cada família de conjuntos tem, pelo menos, uma cadeia máxima".

2.6 Teorema de Zermelo

Definição 2.6.1 : *Seja A um conjunto arbitrário. Consideremos o par (B,R), com $B \subseteq A$ e R uma relação de ordem sobre B que bem ordena B. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os pares (B,R), com esta propriedade. Dados $(B_1,R_1),(B_2,R_2) \in \mathcal{F}$, definimos:*

$$(B_1,R_1) \preceq (B_2,R_2)$$

se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1. $B_1 \subseteq B_2$.
2. $R_1 \subseteq R_2$.
3. *Se* $x \in B_1$ *e* $y \in B_2 - B_1$*, então* $(x,y) \in R_2$.

Proposição 2.6.1 *Sejam $C = \{(B_i,R_i) : i \in I$ uma cadeia qualquer em $\mathcal{F}$ e $B = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ e $R = \bigcup\limits_{i\in I} R_i$, então $(B,R) \in C$.*

Proposição 2.6.2 *Sejam C, B e R definidos na proposição anterior. Então (B,R) é uma cota superior de C.*

As demonstrações destas proposições foram omitidas por serem longas, mas para o leitor interessado indicamos [10].

O teorema que será apresentado a seguir foi conjecturado por Cantor (1883) e provado por Zermelo (1904) afirma que:

Teorema 2.6.1 : *Todo conjunto pode ser bem ordenado.*

Prova. Sejam A um conjunto não vazio qualquer e $\mathcal{F} = \{(B,R) : B \subseteq A,\ R(\leq)$ uma boa ordenação para $B\}$. Então, pelas propriedades 2.6.1 e 2.6.2, $\mathcal{F}$ é um conjunto bem ordenado. Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal (B,R).

Afirmação. $A = B$. De fato, suponhamos, por absurdo, que $A - B \neq \emptyset$. Então, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$. Logo, $y \leq x$, para todo $y \in B$. Sejam

$$B^* = B \cup \{x\} \quad \text{e} \quad R^* = R \cup \{(y,x) : y \in B.$$

Então, $(B^*,R^*) \in \mathcal{F}$, com

$$(B,R) \preceq (B^*,R^*),$$

o que contradiz a maximalidade de (B,R). ∎

Este teorema nos mostra que existe uma relação de ordem com a qual o conjunto em questão é bem - ordenado.

Exemplo: O conjunto $\mathbb{Z}$ não é um conjunto bem ordenado, porém pelo Teorema de Zermelo, temos que existe uma relação de ordem com a qual podemos transformar o conjunto $\mathbb{Z}$ num conjunto bem ordenado, por exemplo, $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$

Definição 2.6.2 *:Dado um conjunto A munido de uma relação R, então f é uma função crescente em $\varphi =< A, R >$ se e somente se:*

(i) *f é uma função em A;*

(ii) *$CD(f) \subseteq A$;*

(iii) *Se $x, y \in A$ e xRy, então $f(x)Rf(y)$.*

Teorema 2.6.2 *Se R é uma boa-ordenação em A e f é uma função crescente em $< A, R >$, então não existe um elemento x tal que $f(x)Rx$.*

Prova. Suponha, por contradição, que existe um elemento $x \in A$ tal que:

$$f(x)Rx. \qquad (i)$$

Seja $B = \{x : f(x)Rx\}$, devido a (i) temos que $B \neq \emptyset$, uma vez que R possui um menor elemento, digamos x_1, então, temos que:

$$f(x_1)Rx_1. \qquad (ii)$$

Seja

$$x_0 = f(x_1), \qquad (iii)$$

portanto, $x_0 R x_1$, como f é crescente, então:

$$f(x_0)Rf(x_1) \qquad (iv)$$

De (iii) e (iv), temos que $f(x_0)Rx_0$.

Logo, $x_0 \in B$ e portanto, x_1 não é o menor elemento de B, o que é uma contradição. ■

Teorema 2.6.3 *Seja R uma boa-ordenação em A e f uma função crescente em $< A, R >$, então f também é crescente em $< CD(f), R >$. [6], p.231, Teorema 73.*

Capítulo 3

Axioma da Escolha: Equivalências e Aplicações

3.1 Equivalências do Axioma da Escolha

O nosso objetivo nesta seção é provar que o Axioma da Escolha, Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo são todos equivalentes, ou seja, assumindo a veracidade de um deles, temos que todos os demais também serão.

Teorema 3.1.1 *O Axioma da Escolha é equivalente ao Lema de Zorn*

Prova. Mostraremos que o Lema de Zorn implica no Axioma da Escolha, omitindo a recíproca, por fugir do escopo deste trabalho. Ao leitor interessado, indicamos [6] ou [5].

Sendo assim, dado um conjunto X seja $F = \{f : D \longrightarrow X; D \subset \wp(X), f(A) \in A, \forall A \in D\}$, então F é um conjunto de funções de subconjuntos de $\wp(X)$ em X, onde todos os elementos da imagem pertencem ao conjunto do domínio. Vamos ordenar este conjunto parcialmente por $(<)$; sejam $f_1, f_2 \in F$ tal que D_1 é o domínio de f_1 e D_2 é o domínio de f_2, diremos que $f_1 < f_2$ se $D_1 \subset D_2$ e $f_2 \mid D_1 = f_1$. Sendo assim, f_2 é uma extensão de f_1, e $(<)$ é uma ordem parcial. Porque é reflexiva, $f_1 < f_1$, porque $D_1 \subset D_1$ e claramente $f_1 \mid D_1 = f_1$. Também é anti-simétrica, pois se $f_1 < f_2$ e $f_2 < f_1$, então $D_1 \subset D_2$ e $D_2 \subset D_1$, portanto temos que $D_1 = D_2$ e assim $f_1 = f_2$. É transitiva, pois $f_1 < f_2$ e $f_2 < f_3$, então $D_1 \subset D_2$ e $D_2 \subset D_3$, logo $D_1 \subset D_3$, e como $f_2 \mid D_1 = f_1$ e $f_3 \mid D_2 = f_2$, portanto $f_3 \mid D_1 = f_2 \mid D_1 = f_1$, com isto temos que $f_1 < f_3$. Portanto, temos $(<)$ é parcialmente ordenada.

Seja C uma cadeia de F, temos $C = \{f_\alpha; \alpha \in J$, como $f_\alpha : D_\alpha \longrightarrow X$, onde $D_\alpha \subset \wp(X)$ e $f(A) \in A$, $\forall A \in D_\alpha$, temos que tomando $D_\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in J} D_\alpha$ podemos definir $f_\beta : D_\beta \longrightarrow X$ da seguinte forma: como $D_\alpha \subset D_\beta$ para todo α, dado $A \in D_\beta$, existe algum $\alpha_0 \in J$ tal que $A \subset D_{\alpha_0}$ e portanto, definimos $f_\beta(A) = f_{\alpha_0}(A) \in A$. Pela ordem temos que $f_\alpha < f_\beta$, $\forall \alpha \in J$. Assim, f_β é uma cota superior.

Sendo assim, pelo Lema de Zorn existe um f_δ que é maximal e onde $D_\delta \subset \wp(X)$. Supondo por absurdo que $D_\delta \neq \wp(X) - \emptyset$, então existe um $A_\delta \in \wp(X)$ tal que $A_\delta \notin D_\delta$. Definimos $D_\gamma = D_\delta \cup A_\delta$. E como $D_\delta \subset D_\gamma$, então:

$$f_\gamma(A) = \begin{cases} f_\delta & : \quad A \in D_\delta \\ a; a \in A_\delta & : \quad A \in A_\delta - D_\delta \end{cases}$$

E assim teríamos $f_\delta < f_\gamma$, o que nos dá um absurdo, visto que o Lema de Zorn nos garantiu que f_δ é o elemento maximal. Logo, $D_\delta = \wp(X) - \emptyset$, e formamos um conjunto de funções $f : \wp(X) - \emptyset \longrightarrow X, f(A) \in A$ para todo $A \in \wp(X) - \emptyset$ sendo que esta é a função escolha, isto posto, temos que o Lema de Zorn implica no Axioma da escolha. ∎

Corolário 3.1.1 : *Cada cadeia em um conjunto parcialmente ordenado está contida em alguma cadeia maximal, se e somente se, o Lema de Zorn vale.*

Prova. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, no qual toda cadeia está contida em uma cadeia maximal, suponha que toda cadeia tem cota superior, seja a a cota superior da cadeia maximal, então para todo $x \in X$ temos que $a \leqslant x$, então $x = a$, porque a é uma cota superior da cadeia maximal, e portanto um elemento maximal. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, e $C_0 \in X$ uma cadeia em X. Seja C o conjunto das cadeias em X que contem C_0, C é parcialmente ordenado por inclusão, dado C_α uma cadeia em C, então a união $\bigcup_{C_\alpha \in C} C_\alpha$ é uma cota superior, temos que vale o Lema de Zorn em C e portanto, existe uma cadeia maximal C_δ, como a cadeia maximal $C_\delta \in C$ e $C_0 \in C$, então $C_0 \subset C_\delta$. Com isto provamos o teorema.

∎

Teorema 3.1.2 *O Axioma da Escolha é equivalente ao Teorema de Zermelo*

Prova. Vimos em 2.6 que para demonstrar o Teorema de Zermelo utilizamos o Lema de Zorn, que já sabemos ser equivalente ao Axioma da Escolha.

Agora provaremos que o Teorema de Zermelo implica no Axioma da Escolha.

Seja A um conjunto qualquer dado, e sejam A_α subconjuntos de A não vazios, então temos que $\prod A_\alpha$ com $\alpha \in J$ é definido como o conjunto de todas as funções

$f : J \longrightarrow \bigcup A_\alpha$ tais que $f(\alpha) \in A_\alpha$. Como $\bigcup A_\alpha$ é um conjunto, pelo Teorema de Zermelo ele é um conjunto bem ordenado. Definimos $f(\alpha) = minA_\alpha$, onde $minA_\alpha$ é o menor elemento do subconjunto A_α, que existe porque ele é um subconjunto de um conjunto bem ordenado e portanto bem ordenado. Como a função f é uma função escolha, então podemos dizer que para o produto cartesiano de conjuntos não vazios obtemos algum elemento, uma vez que o menor elemento sempre existe, e assim temos que o Axioma da Escolha é válido. ■

3.2 Aplicações do Axioma da Escolha

Agora apresentaremos algumas aplicações que envolvem o Axioma da Escolha, o Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo. Faremos cinco aplicações, passando pela Teoria dos Conjuntos, Álgebra Linear e Análise.

Definição 3.2.1 *Dizemos que um conjunto A é **equipotente** a um conjunto B se existir uma bijeção de A em B. Denotaremos por $A \sim B$ (lemos: A é equipotente a B).*

Definição 3.2.2 *Quando um subconjunto A de B não possui todos os elementos que perteçam ao conjunto B que ele está contido, dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B.*

Definição 3.2.3 *Um conjunto A é **infinito** quando possui um subconjunto próprio equipotente a ele.*

Teorema 3.2.1 *Se um conjunto é infinito, então ele tem um subconjunto equipotente ao dos números naturais.*

Prova. Seja X infinito, então se $A \in C$, onde C é a coleção de subconjuntos finitos de X, temos $X - A \neq \emptyset$. Considere f uma função escolha para X, logo f é uma função da coleção de todos os subconjuntos não vazios de X em X, tal que $f(A) \in A$ para todo A no domínio de f. Definimos a função $U : \mathbb{N} \to C$, recursivamente a começar pelo zero, temos $U(0) = \emptyset$ e $U(n^+) = U(n) \cup \{f(X - U(n))\}$ para cada natural n, e onde n^+ é o sucessor de n. Assim se $x(n) = f(X - U(n))$, temos que $x : \mathbb{N} \to X$ é uma função injetora, e portanto $\mathbb{N}$ é equipotente a algum subconjunto de X.
Para demonstrar a injetividade, notemos que $x(n) \notin U(n)$ e $x(n) \in U(n^+)$ e $U(n) \subset U(m)$ se m, n são naturais distintos com $m > n$, então como $x(n) \in U(m)$ e $x(m) \notin U(m)$, logo $x(n) \neq x(m)$ e portanto x é injetora. ■

Definição 3.2.4 ***Base de Hamel.*** *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo de escalares K. Dizemos que uma coleção $(e_\alpha)_{\alpha \in J} \subset E$ é linearmente independente se, para todo $I \subset J$ finito,*

$$\sum_{i\in I} k_i e_i = 0 \Longrightarrow k_i = 0,\ \forall i \in I$$

Uma base de Hamel para E é uma coleção e elementos de E linearmente independentes, $H = e(\alpha)_{\alpha\in J}$ tal que todo elemento $x \in E$ pode ser escrito como uma soma finita de combinações lineares de elementos de H, ou seja, existe $I \subset J$ finito e $(k_i)_{i\in I} \subset K$ tais que $x = \sum_{i\in I} k_i e_i$.

Teorema 3.2.2 *Todo espaço vetorial admite uma base de Hamel.*

Um fato interessante sobre esse teorema é que ele foi originalmente demonstrado por Hamel em 1905, e em 1984, Blass demonstrou que o Teorema da base de Hamel implica no Axioma da Escolha, sendo assim, temos que existe uma equivalência entre eles.

Prova. Considere o conjunto B cujos elementos são coleções de vetores linearmente independentes. B não é vazio pois $\emptyset \in B$. Consideramos a relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos em B. Suponha que Γ_β seja uma cadeia em B, então $\cup_\beta \Gamma_\beta \in B$ pois dada uma coleção finita $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset \cup_\beta \Gamma_\beta$, então certamente existe β_0 tal que $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset \Gamma_{\beta_0}$. Como Γ_{β_0} é formado por vetores linearmente independentes, podemos concluir que $\cup_\beta \Gamma_\beta$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal em B, digamos Γ_M. Afirmamos que Γ_M é uma base de Hamel, de fato, dado $e \notin \Gamma_M$, então $\Gamma_M \cup \{e\}$ não é linearmente independente, logo, existem escalares $k, k_1, k_2, ..., k_n$ e vetores $e_1, e_2, ..., e_n \subset \Gamma_M$ tais que $ke + k_1e_1 + k_2e_2 + ... + k_ne_n = 0$, como $k \neq 0$, teremos então:

$$e = \tfrac{-1}{k} \sum_{i=1}^{n} k_i e_i$$

■

(Função Aditiva) Existe uma função $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a condição aditiva

$$T(x + y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

mas não é uma transformação linear, isto é, $T(x) \neq ax$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Prova. Verifica-se da Álgebra Linear que $\mathbb{R}$ com as operações usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$. Assim, pelo teorema anterior, temos que uma base de *Hamel* $\beta = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Logo, para cada $x \in \mathbb{R}$, existem únicos, $r_{k_1}, ..., r_{k_n} \in \mathbb{Q}$, onde $k_1, ..., k_n \in \mathbb{N}$, tais que:

$$x = r_{k_1}x_{k_1} + ... + r_{k_n}x_{k_n} = \sum_{j=1}^{n} r_{k_j}x_{k_j}.$$

Escolhendo $x_{i_0} \in \beta$ e definimos $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$T(x) = \begin{cases} r_{i_0} & : \text{ se } x = r_{k_1}x_{k_1} + ... + r_{k_n}x_{k_n} \text{ e } x_{k_1} = x_{i_0} \\ 0 & : \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então T possui as propriedades desejadas. De fato, $T(x_{i_0}) = 1$, pois $x_{i_0} = x_{k_i} = 1x_{k_i}$, é a representação básica de x_{i_0}, e $T(x_i) = 0$, para todo $x_i \in \beta$, com $x_i \neq x_{i_0}$, pois x_{i_0} não ocorre na representação básica $x_i = 1x_i$ de x_i. Agora, se $T(x) = ax$, para algum $a \in \mathbb{R}$, então

$$T(x_{i_0}) = 1 = ax_{i_0} \Rightarrow a \neq 0.$$

Por outro lado,

$$0 = T(x_i) = ax_i \Rightarrow a = 0,$$

pois $0 \notin \beta$, o que é impossível. Portanto, $T(x) \neq ax$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Finalmente, é fácil verificar que

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com isto chegamos ao resultado desejado. ■

Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetiva entre os conjuntos A e B, existe uma função $g : B \to A$ é injetiva tal que $(f \circ g) = I_B$.

Prova. Suponhamos que $f : A \to B$ seja uma função sobrejetiva. Então $X_b = f^{-1}(b)$ é um subconjunto não vazio de A, para todo $b \in B$. Seja

$$r : \wp(A) \to A$$

uma função escolha para A, isto é, $r(X) \in X$, para todo $X \in \wp(A)$. Então a função $g : B \to A$ definida como

$$g(b) = r(X_b), \forall b \in B,$$

tem as propriedades desejadas. Com efeito,

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(r(X_b)) = b = I_B(b),$$

pois,

$$r(X_b) \in X_b = \{a \in A : f(a) = b\} = f^{-1}(b).$$

Dados $b, c \in B$, se $b \neq c$, então $X_b \neq X_c$. Logo, $g(b) \neq g(c)$, isto é, g é injetora. ■

Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função descontínua num ponto a. Portanto, existe uma sequência x_n de números reais tal que x_n converge para a e $f(x_n)$ não converge para $f(a)$.

Prova. Supondo que f é descontínua em a, então existe $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para qualquer $\delta > 0$, existe $x_\delta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$| x_\delta - a |< \delta \quad \text{e} \quad | f(x_\delta) - f(a) | \geqslant \epsilon.$$

Logo,

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} :| x - a |< \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad | f(x) - f(a) | \geqslant \epsilon\} \neq \emptyset,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pelo axioma da escolha,

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Portanto, existe uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $x_n \in A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, mas $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$. ■

Apêndice A

Gödel e seus Teoremas

Os teoremas da incompletude de Kurt Gödel, vêm por um fim dramático à tentativa de unificar a Matemática num sistema formal como propôs Hilbert. As consequências na ciência, uma vez que esta assenta fortemente na Matemática, nomeadamente a Física, podem ser ou significar que não é possível chegar a uma Teoria de Tudo. Em relação à sua aplicação na inteligência humana a discursão também está em aberto. Pode - se especular que tem implicações na avaliação da nossa capacidade de distinguir o que é verdadeiro ou falso. Gödel foi o primeiro a falar sobre o tema e concluiu que: "ou a mente não era equivalente a uma máquina finita ou que haveria determinadas equações diofantinas para as quais não era possível encontrar uma solução".

Os teoremas de Gödel dizem que é impossível definir um sistema de axiomas completo que seja simultaneamente consistente. Isto é, ou é completo ou é consistente.

Definição A.0.5 *: Um sistema diz - se completo, se dentro dele, podemos provar qualquer afirmação ou a sua negação a partir dos axiomas. Os axiomas são os alicerces do sistema, são as afirmações iniciais que se consideram evidentes e sem necessidade de prova. Um sistema diz - se consistente se não podemos provar simultaneamente uma afirmação e a sua negação.*

Definição A.0.6 *:Principia Mathemática (do latim: Princípios matemáticos) considera as noções de verdade e falsidade dentro de uma proposição primitiva.*

Teorema A.0.3 *(Teorema da Completividade de Gödel)*
Seja S um conjunto consistente de argumentos. Então existe um modelo para S cuja cardinalidade não excede a cardinalidade do número de argumentos de S se S é infinito e, é contável, se S é finito.

O **Teorema da completividade de Gödel** dá indícios da incompletividade de alguns sistemas da Matemática através do corolário abaixo.

Corolário A.0.1 *Se S admite um modelo infinito ou mesmo modelos finitos arbitrariamente grandes, então S admite modelos de cardinalidade arbitrariamente grandes.*

Este colorário afirma que nenhum sistema de axiomas pode ter um único modelo (a menos de isomorfismos) a não ser que esse modelo único seja finito. Caso o sistema admita um modelo infinito ou arbitrariamente grande, ele também admitirá modelos com diferentes cardinalidades. Dessa forma, os sistemas matemáticos que formam os inteiros e os números reais, os quais apresentam seguramente um único modelo, não podem ser descritos completamente por qualquer sistema formal de axiomas. Isso ocorre porque tanto o sistema axiomático que fundamenta os inteiros quanto aquele em que se baseiam os reais apresentam cada um único modelo não-finito. Logo, pelo colorário anterior, ambos os sistemas devem possuir outros modelos de cardinalidades arbitrariamente grandes, fato que não se verifica para os sistemas considerados.

Teorema A.0.4 *(Primeiro Teorema de Incompletude)*
Se uma Principia Mathematica é consistente, então há proposições matemáticas verdadeiras, exprimíveis na sua linguagem, mas que não são demonstráveis no sistema.

Na prova deste teorema, Gödel elaborou um complexo código que permitia traduzir proposições matemáticas com símbolos da aritmética dos números naturais e aplicou um argumento do tipo da diagonal de Cantor para construir tal proposição.

Observação A.0.1 *Para evitar o exagero na notação, denotaremos, a partir de agora, Principia Mathematica por PM.*

Teorema A.0.5 *(Segundo Teorema de Incompletude)*
Se PM é consistente, então a própria consistência de PM não é demonstrável em PM.

Apesar destas provas dizerem a respeito a PM, como o próprio Gödel notou, os resultados também são aplicáveis a qualquer sistema formal com poder expressivo suficiente para formalizar a aritmética dos números naturais, como ZFC, desde que possua um conjunto de axiomas satisfazendo a certas condições, consideradas como aceitáveis.

Observação: Um conjunto de argumentos S é dito ser consistente se a proposição $A \wedge \sim A$ não pode ser derivada de S para nenhum símbolo A. Pode ser provado que se A é um argumento válido do sistema S, ele é verdadeiro em qualquer modelo de S. Além disso, se um conjunto S de argumentos tem um modelo, então ele é consistente.

Referências Bibliográficas

[1] Alfonso, A. B., Nascimento, M. C., Feitosa, H. A. *Teoria dos Conjuntos: Sobre a Fundamentação Matemática e a Construção de Conjuntos Numéricos*, Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna Ltda. (2011)

[2] Ávila, G. *Várias Faces da Matemática*, Segunda Edição, São Paulo: Blucher. (2010)

[3] Boyer, C. B. *História da Matemática*, Terceira Edição, São Paulo: Blucher. (2010)

[4] Halmos, P. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, São Paulo: Polígono/EDUSP. (1970)

[5] Levy, A. *Basic Set Theory*, Dover Publications. (2002)

[6] Suppes, P. *Axiomatic Set Theory*, New York: Dover Publications. (1977)

[7] Hein, N., Dadam, F. *Teoria Unificada dos Conjuntos*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. (2009)

[8] Rocha, J. *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*, Rio de Janeiro: SBM. (2012)

[9] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P; Wagner, E.; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 1, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. (2001)

[10] Silva, A. A. *Uma Introdução Axiomática dos Conjuntos*, João Pessoa: Editora Universitária UFPB. (2011)

[11] Lima, E. L. *Curso de Análise vol. 1*, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. (2012)

[12] Iezzi, G., Murakami, C. *Fundamentos de Matemática Elementar vol. 1*, São Paulo: Editora Atual. (2004)

[13] Feitosa, H. de A.; Nascimento, M. C.; Alfonso, A. B. *Teoria dos Conjuntos*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna. (2011)